

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Виктор Андреевич Денисюк

Новосибирский государственный университет,
Новосибирск, Россия

v.denisyuk@g.nsu.ru

Аннотация

Рассматривается класс систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности. Исследованы асимптотические свойства решений этих систем в зависимости роста размерности системы. Доказано, что при достаточно большом числе дифференциальных уравнений последняя компонента решения задачи Коши является приближенным решением начальной задачи для одного дифференциального уравнения с запаздыванием.

Ключевые слова и фразы

система обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности, асимптотические свойства решений, дифференциальное уравнение с запаздыванием, предельная теорема

Источник финансирования

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение № 075-15-2025-349 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации

Для цитирования

Денисюк В. А. Свойства решений одного класса систем обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности // *Математические труды*, 2026, Т. 29, № 3, С. 47-70. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-3-47-70

Properties of solutions to one class of systems of ordinary differential equation of high dimension

Viktor A. Denisiuk

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

v.denisyuk@g.nsu.ru

Abstract

A class of systems of high dimensional nonlinear ordinary differential equations is considered. Asymptotic properties of solutions to these systems are investigated as the dimension increases. We prove that, for a sufficiently large number of equations, the last component of the solution to the Cauchy problem is an approximate solution to the initial-value problem for a delay differential equation.

Keywords

high dimensional system of ordinary differential equations, asymptotic properties of solutions, delay differential equation, limit theorem

Funding

The work is supported by the Mathematical Center in Akademgorodok under Agreement No. 075-15-2025-349 with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation

For citation

Denisiuk V.A. Properties of solutions to one class of systems of ordinary differential equation of high dimension // *Mat. Trudy*, 2026, V. 29, N. 3, P. 47-70. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-3-47-70

§ 1. Введение и предварительные сведения

Системы дифференциальных уравнений большой размерности часто используют при моделировании различных процессов в биологии и химии (см., например, [1–4] и указанную в этих работах литературу). В частности, задача о моделировании многостадийного синтеза вещества (см., например, [3, 4]) приводит к системе следующего вида

$$\frac{dx}{dt} = A_n x + F(t, x), \quad (1)$$

где

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T, \quad F(t, x) = (g(t, x_n), 0, \dots, 0)^T,$$

$$A_n = \begin{pmatrix} -\frac{n-1}{\tau} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{n-1}{\tau} & -\frac{n-1}{\tau} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{n-1}{\tau} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{n-1}{\tau} & -\theta \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Количество уравнений n в системе (1) определяется числом стадий, $x_j(t)$ — концентрация вещества на j -й стадии, параметр τ характеризует время протекания процесса. Нелинейная функция $g(t, z)$ определяет закон инициации. Поскольку система является нелинейной и количество стадий n может быть очень большим, нахождение решения системы даже с помощью современных компьютеров является очень трудоемкой задачей. Поэтому на этапе нахождения численных значений концентрации конечного продукта $x_n(t)$ исследователи сталкиваются с “проблемой большой размерности”.

Эта проблема была успешно решена Г. В. Демиденко, он установил связи между решениями этой системы и решениями уравнения с запаздыванием. Ниже мы сформулируем результат, полученный Г. В. Демиденко для системы (1) (см., например, [3, 5]). При каждом фиксированном n рассмотрим задачу Коши для системы (1)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A_n x + F(t, x), & t > 0, \\ x|_{t=0} = (0, \dots, 0, b)^T, & b \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Будем предполагать, что функция $g(t, z)$ непрерывна, ограничена и липшицева по z

$$|g(t, z)| \leq G, \quad |g(t, z^1) - g(t, z^2)| \leq L|z^1 - z^2|, \quad z^1, z^2 \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Каждая задача Коши имеет единственное решение при $t \geq 0$, которое обозначим через $x^n(t)$. Составим последовательность $\{x_n^n(t)\}$ из последних компонент решений $x^n(t)$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. (Г. В. Демиденко). Последовательность $\{x_n^n(t)\}$ равномерно сходится на любом отрезке $[0, T]$:

$$x_n^n(t) \rightarrow y(t), \quad n \rightarrow \infty.$$

Предельная функция $y(t)$ является решением начальной задачи для уравнения с запаздыванием

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t - \tau, y(t - \tau)), & t > \tau, \\ y(t) \equiv be^{-\theta t}, & 0 \leq t \leq \tau, \\ y(\tau + 0) = be^{-\theta \tau}, \end{cases} \quad (4)$$

при этом выполнена оценка

$$\max_{t \in [0, T]} |x_n^n(t) - y(t)| \leq cn^{-\frac{1}{2}}, \quad n \gg 1, \quad (5)$$

где $c > 0$ не зависит от n .

Отметим, что полученный результат дает строгое обоснование эффективного метода для численного нахождения концентрации конечного продукта $x_n(t)$ при $n \gg 1$ с использованием уравнения с запаздыванием. Действительно, для нахождения значений $x_n(t)$ достаточно решить начальную задачу (4). Более того, с использованием (5) можно оценить погрешность аппроксимации $x_n(t) \approx y(t)$ при $n \gg 1$. Из (5), очевидно, следует, что чем большее количество стадий n требуется для получения конечного продукта синтеза, тем точнее можно получить результат, следуя указанному методу.

Теорема 1 послужила основой для получения аналогичных утверждений для различных классов систем обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности. Г. В. Демиденко предложил ряд методов для доказательства предельных теорем, которые были развиты в его работах и работах его учеников (см., например, [5–15]).

В данной работе рассматривается следующий класс систем нелинейных

обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dz_1}{dt} = g(t, z_n) - \frac{n-1}{\tau_1} z_1 + \frac{n-1}{\tau_2} z_2, \quad t > 0, \quad \tau_2 > \tau_1 > 0, \\ \frac{dz_j}{dt} = \frac{n-1}{\tau_1} z_{j-1} - \left(\frac{n-1}{\tau_1} + \frac{n-1}{\tau_2} \right) z_j + \frac{n-1}{\tau_2} z_{j+1}, \quad j = 2, \dots, n-2, \\ \frac{dz_{n-1}}{dt} = \frac{n-1}{\tau_1} z_{n-2} - \left(\frac{n-1}{\tau_1} + \frac{n-1}{\tau_2} \right) z_{n-1}, \\ \frac{dz_n}{dt} = -\theta z_n + \frac{n-1}{\tau_1} z_{n-1}, \quad \theta > 0, \end{array} \right. \quad (6)$$

где функция $g(t, z)$ непрерывна, ограничена и липшицева по z . Отличительной особенностью изучаемой системы является тот факт, что она возникает при описании процесса при наличии обратимости процесса ($\tau_2 > 0$). Заметим, что при $\tau_2 \rightarrow \infty$ система (6) переходит в (1) и естественно возникает вопрос о предельной теореме, являющейся аналогом теоремы 1. В следующем параграфе мы сформулируем и докажем основной результат работы.

§ 2. Основной результат.

Рассмотрим задачу Коши для системы (6)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dz}{dt} = B_n z + F(t, z), \quad t > 0, \\ z|_{t=0} = z_0, \end{array} \right. \quad (7)$$

где

$$z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t))^T, \quad F(t, z) = (g(t, z_n), 0, \dots, 0)^T,$$

$$B_n = \begin{pmatrix} -\frac{n-1}{\tau_1} & \frac{n-1}{\tau_2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{n-1}{\tau_1} & -\left(\frac{n-1}{\tau_1} + \frac{n-1}{\tau_2}\right) & \frac{n-1}{\tau_2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{n-1}{\tau_1} & -\left(\frac{n-1}{\tau_1} + \frac{n-1}{\tau_2}\right) & \frac{n-1}{\tau_2} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{n-1}{\tau_1} & -\left(\frac{n-1}{\tau_1} + \frac{n-1}{\tau_2}\right) & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \frac{n-1}{\tau_1} & -\theta \end{pmatrix},$$

$$z_0 = (0, \dots, 0, b)^T.$$

При каждом фиксированном n задача Коши (7) имеет единственное решение $z_n^n(t)$, определенное при $t \geq 0$. Будем неограниченно увеличивать n и составим последовательность $\{z_n^n(t)\}$ из последних компонент решений $z_n^n(t)$. Имеет место следующий результат.

Теорема 2. Последовательность $\{z_n^n(t)\}$ равномерно сходится на любом отрезке $[0, T]$:

$$z_n^n(t) \rightarrow y(t), \quad n \rightarrow \infty.$$

Предельная функция $y(t)$ является решением начальной задачи для уравнения с запаздыванием

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t - \tau, y(t - \tau)), & t > \tau, \\ y(t) \equiv be^{-\theta t}, & 0 \leq t \leq \tau, \quad \tau = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_2 - \tau_1}, \\ y(\tau + 0) = be^{-\theta \tau}, \end{cases} \quad (8)$$

при этом выполнена оценка

$$\max_{t \in [0, T]} |z_n^n(t) - y(t)| \leq Dn^{-\frac{1}{2}}, \quad n \gg 1,$$

где $D > 0$ не зависит от n .

Доказательство. При доказательстве мы будем использовать метод сравнения. Рассмотрим задачу для системы вида (1)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A_n x + F(t, x), & t > 0. \\ x|_{t=0} = z_0, \end{cases} \quad (9)$$

полагая в матрице A_n параметр τ зависимым от τ_1, τ_2 следующим образом:
 $\tau = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_2 - \tau_1}$.

Сравнивая решения $x_n^n(t)$ и $z_n^n(t)$ задач Коши (6) и (9), соответственно, мы докажем, что для любого $T > 0$

$$\max_{t \in [0, T]} |z_n^n(t) - x_n^n(t)| \leq dn^{-\frac{1}{2}}, \quad n \gg 1, \quad (10)$$

где $d > 0$ не зависит от n . С учетом оценки (5) отсюда мы получим требуемый результат.

Доказательство неравенства (10) мы разобьем на несколько лемм. Обозначим $u^n(t) = z^n(t) - x^n(t)$. Очевидно, что эта вектор-функция является решением следующей задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = A_n u + (B_n - A_n)z + F(t, z) - F(t, x), \\ u|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (11)$$

где

$$(B_n - A_n) = C_n = \begin{pmatrix} -\frac{n-1}{\tau_2} & \frac{n-1}{\tau_2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{n-1}{\tau_2} & -2\frac{n-1}{\tau_2} & \frac{n-1}{\tau_2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{n-1}{\tau_2} & -2\frac{n-1}{\tau_2} & \frac{n-1}{\tau_2} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{n-1}{\tau_2} & -2\frac{n-1}{\tau_2} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \frac{n-1}{\tau_2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_n z = \frac{n-1}{\tau_2} \begin{pmatrix} -z_1 + z_2 \\ z_1 - 2z_2 + z_3 \\ \vdots \\ z_{n-2} - 2z_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Компоненты вектор-функции $u^n(t)$ будем обозначать $u_k^n(t)$, $k = 1, \dots, n$. Справедлив следующий результат.

Лемма 1. Для компонент вектор-функции $u^n(t)$ справедливы соотношения

$$u_k^n(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} \left(\frac{n-1}{\tau} \right)^{k-1} e^{-\frac{n-1}{\tau}(t-s)} [g(s, z_n^n(s)) - g(s, x_n^n(s))] ds + \sum_{j=1}^k \int_0^t \frac{(t-s)^{k-j}}{(k-j)!} \left(\frac{n-1}{\tau} \right)^{k-j} e^{-\frac{n-1}{\tau}(t-s)} h_j(s) ds, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad (12)$$

где $h_j(t)$ — j -я компонента вектор-функции $C_n z^n(t)$.

Доказательство. Доказательство проведем методом математической индукции. Пусть $k = 1$. Поскольку $u^n(t)$ — решение задачи Коши (11), для $u_1^n(t)$ выполнено тождество

$$\frac{du_1^n(t)}{dt} \equiv -\frac{n-1}{\tau} u_1^n(t) + h_1(t) + g(t, z_n^n(t)) - g(t, x_n^n(t)).$$

Используя начальные данные для $u_1^n(t)$, получаем

$$u_1^n(t) \equiv \int_0^t e^{-\frac{n-1}{\tau}(t-s)} ([g(s, z_n^n(s)) - g(s, x_n^n(s))] + h_1(s)) ds,$$

что совпадает с (12) для случая $k = 1$. Предположим, что представление (12) справедливо для всех $k < l$. Покажем, что для $u_l^n(t)$ представление (12) верно. В силу системы выполнено тождество

$$\frac{du_l^n(t)}{dt} \equiv -\frac{n-1}{\tau} u_l^n(t) + \frac{n-1}{\tau} u_{l-1}^n(t) + h_l(t).$$

Используя начальные данные для $u_l^n(t)$, имеем

$$u_l^n(t) \equiv \int_0^t e^{-\frac{n-1}{\tau}(t-s)} \left(\frac{n-1}{\tau} u_{l-1}^n(s) + h_l(s) \right) ds.$$

Подставляя соотношение для $u_{l-1}^n(t)$, получаем

$$u_l^n(t) \equiv \int_0^t e^{-\frac{n-1}{\tau}(t-s)} \left(\frac{n-1}{\tau} \left[\int_0^s \frac{(s-\xi)^{l-2}}{(l-2)!} \left(\frac{n-1}{\tau} \right)^{l-2} \times e^{-\frac{n-1}{\tau}(s-\xi)} [g(\xi, z_n^n(\xi)) - g(\xi, x_n^n(\xi))] d\xi \right. \right.$$

$$+ \sum_{j=1}^{l-1} \int_0^s \frac{(s-\xi)^{l-j-1}}{(l-j-1)!} \left(\frac{n-1}{\tau} \right)^{l-j-1} e^{-\frac{n-1}{\tau}(s-\xi)} h_j(\xi) d\xi \Big] + h_l(s) \Big) ds.$$

Меняя порядок интегрирования, имеем

$$u_l^n(t) \equiv \int_0^t \left(\frac{n-1}{\tau} \right)^{l-1} e^{-\frac{n-1}{\tau}(t-\xi)} [g(\xi, z_n^n(\xi)) - g(\xi, x_n^n(\xi))] \int_{\xi}^t \frac{(s-\xi)^{l-2}}{(l-2)!} ds d\xi \\ + \sum_{j=1}^{l-1} \int_0^t \left(\frac{n-1}{\tau} \right)^{l-j} e^{-\frac{n-1}{\tau}(t-\xi)} h_j(\xi) \int_{\xi}^t \frac{(s-\xi)^{l-j-1}}{(l-j-1)!} ds d\xi + \int_0^t e^{-\frac{n-1}{\tau}(t-s)} h_l(s) ds.$$

Поскольку

$$\int_{\xi}^t \frac{(s-\xi)^i}{i!} ds = \frac{(t-\xi)^{i+1}}{(i+1)!}, \quad i = 1, \dots, n,$$

получаем формулу (12) для $u_l^n(t)$. В силу принципа индукции лемма доказана.

Лемма 2. Для $u_n^n(t)$, при $n > \theta\tau + 1$ справедливо представление

$$u_n^n(t) = \int_0^t \widehat{\psi}_n(t-s) [g(s, z_n^n(s)) - g(s, x_n^n(s))] ds + \sum_{j=1}^n \int_0^t \widehat{\psi}_{n-j+1}(t-s) h_j(s) ds, \quad (13)$$

где

$$\widehat{\psi}_1(t) = e^{-\theta t}, \\ \widehat{\psi}_k(t) = \frac{e^{-\theta t}}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{k-1}} \left(1 - e^{-\omega t} \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(\omega t)^j}{j!} \right), \quad \omega = \frac{n-1}{\tau} - \theta > 0,$$

$h_j(t)$ — j -я компонента вектор-функции $C_n z^n(t)$.

Доказательство. Пусть $u_n^n(t)$ — последняя компонента решения $u^n(t)$ задачи Коши (11). Следовательно, в силу системы выполнено тождество

$$\frac{du_n^n(t)}{dt} \equiv -\theta u_n^n(t) + \frac{n-1}{\tau} u_{n-1}^n(t) + h_n(t).$$

Учитывая нулевые начальные данные, получаем

$$u_n^n(t) \equiv \int_0^t e^{-\theta(t-s)} \left(\frac{n-1}{\tau} u_{n-1}^n(s) + h_n(s) \right) ds.$$

Применяя для $u_{n-1}^n(t)$ лемму 1, имеем

$$\begin{aligned} u_n^n(t) &\equiv \int_0^t e^{-\theta(t-s)} h_n(s) ds + \int_0^t e^{-\theta(t-s)} \left(\frac{n-1}{\tau} \right) \\ &\times \left(\int_0^s \frac{(s-\xi)^{n-2}}{(n-2)!} \left(\frac{n-1}{\tau} \right)^{n-2} e^{-\frac{n-1}{\tau}(s-\xi)} [g(\xi, z_n^n(\xi)) - g(\xi, x_n^n(\xi))] d\xi \right. \\ &\left. + \sum_{j=1}^{n-1} \int_0^s \frac{(s-\xi)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} \left(\frac{n-1}{\tau} \right)^{n-j-1} e^{-\frac{n-1}{\tau}(s-\xi)} h_j(\xi) d\xi \right) ds. \end{aligned}$$

Приводя подобные и меняя порядок интегрирования, получаем

$$\begin{aligned} u_n^n(t) &\equiv \int_0^t e^{-\theta(t-s)} h_n(s) ds + \int_0^t e^{-\theta t + \frac{n-1}{\tau} \xi} \\ &\times \left(\int_\xi^t \frac{(s-\xi)^{n-2}}{(n-2)!} \left(\frac{n-1}{\tau} \right)^{n-1} e^{(\theta - \frac{n-1}{\tau})s} ds \right) [g(\xi, z_n^n(\xi)) - g(\xi, x_n^n(\xi))] d\xi \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} \int_0^t e^{-\theta t + \frac{n-1}{\tau} \xi} \left(\int_\xi^t \frac{(s-\xi)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} \left(\frac{n-1}{\tau} \right)^{n-j} e^{(\theta - \frac{n-1}{\tau})s} ds \right) h_j(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (14)$$

Вычислим

$$v_l(t, \xi) = \int_\xi^t \frac{(s-\xi)^l}{l!} e^{-\omega s} ds, \quad l = 0, 1, \dots, n,$$

где $\omega = \frac{n-1}{\tau} - \theta$.

Рассмотрим два случая: $l > 0$ и $l = 0$. Если $l = 0$, тогда

$$v_0(t, \xi) = \int_\xi^t e^{-\omega s} ds = \frac{e^{-\omega \xi}}{\omega} (1 - e^{-\omega(t-\xi)}).$$

Пусть $l > 0$. Применяя формулу интегрирования по частям, имеем

$$v_l(t, \xi) = \int_\xi^t \frac{(s-\xi)^l}{l!} e^{-\omega s} ds = -\frac{(t-\xi)^l}{l! \omega} e^{-\omega t} + \int_\xi^t \frac{(s-\xi)^{l-1}}{(l-1)! \omega} e^{-\omega s} ds$$

$$= -e^{-\omega\xi} \frac{(\omega(t-\xi))^l}{l!\omega^{l+1}} e^{-\omega(t-\xi)} + \frac{v_{l-1}(t, \xi)}{\omega}.$$

Повторяя интегрирование по частям, получаем

$$v_l(t, \xi) = \frac{e^{-\omega\xi}}{\omega^{l+1}} \left(1 - e^{-\omega(t-\xi)} \sum_{j=0}^l \frac{(\omega(t-\xi))^j}{j!} \right).$$

Поскольку в силу обозначений

$$e^{-\theta t + \frac{n-1}{\tau}\xi} e^{-\omega\xi} = e^{-\theta(t-\xi)}, \quad \frac{\left(\frac{n-1}{\tau}\right)^{l+1}}{\omega^{l+1}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{l+1}},$$

то, подставляя полученные для $v_l(t, \xi)$ формулы в (16), получаем

$$\begin{aligned} u_n^n(t) &\equiv \int_0^t e^{-\theta(t-s)} h_n(s) ds \\ &+ \int_0^t \frac{e^{-\theta(t-\xi)}}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{n-1}} \left(1 - e^{-\omega(t-\xi)} \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(\omega(t-\xi))^j}{j!} \right) [g(\xi, z_n^n(\xi)) - g(\xi, x_n^n(\xi))] d\xi \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} \int_0^t \frac{e^{-\theta(t-\xi)}}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{n-j}} \left(1 - e^{-\omega(t-\xi)} \sum_{k=0}^{n-j-1} \frac{(\omega(t-\xi))^k}{k!} \right) h_j(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

В силу определения функций $\widehat{\psi}_j(t)$ для $u_n^n(t)$ выполнено соотношение (13). Таким образом, лемма 2 доказана.

Заметим, что сумму в (13) можно преобразовать следующим образом:

$$\sum_{j=1}^n \int_0^t \widehat{\psi}_{n-j+1}(t-s) h_j(s) ds = \int_0^t \langle \Psi(t-s), C_n z^n(s) \rangle ds = \int_0^t \langle C_n^* \Psi(t-s), z^n(s) \rangle ds,$$

где

$$\Psi(t) = (\widehat{\psi}_n(t), \dots, \widehat{\psi}_1(t))^T,$$

$\langle v_1, v_2 \rangle$ обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$,

$$C_n^* = \begin{pmatrix} -\frac{n-1}{\tau_2} & \frac{n-1}{\tau_2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{n-1}{\tau_2} & -2\frac{n-1}{\tau_2} & \frac{n-1}{\tau_2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{n-1}{\tau_2} & -2\frac{n-1}{\tau_2} & \frac{n-1}{\tau_2} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{n-1}{\tau_2} & -2\frac{n-1}{\tau_2} & \frac{n-1}{\tau_2} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u_n^n(t) &= \int_0^t \widehat{\psi}_n(t-s)[g(s, z_n^n(s)) - g(s, x_n^n(s))] ds \\ &+ \frac{n-1}{\tau_2} \int_0^t \left(\widehat{\psi}_{n-1}(t-s) - \widehat{\psi}_n(t-s) \right) z_1^n(s) ds \\ &+ \sum_{j=1}^{n-2} \frac{n-1}{\tau_2} \int_0^t \left[\widehat{\psi}_j(t-s) - 2\widehat{\psi}_{j+1}(t-s) + \widehat{\psi}_{j+2}(t-s) \right] z_{n-j}^n(s) ds \\ &= I_1(t) + I_2(t) + I_3(t). \end{aligned} \quad (15)$$

Ниже мы получим оценку для $u_n^n(t)$ при $n \gg 1$, оценивая каждое из слагаемых $I_k(t)$, $k = 1, 2, 3$. Для этого мы будем использовать следующее утверждение из [11].

Лемма 3 [11]. Справедливы следующие оценки

$$|z_j^n(t)| \leq \frac{G\tau}{n-1}, \quad t > 0, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Оценим первые два слагаемых в представлении (15).

Лемма 4. Существует $n_* > 0$ такое, что при $n > n_*$ справедливы оценки

$$|I_1(t)| \leq 2e^{\theta\tau} L \int_0^t |u_n^n(s)| ds, \quad (16)$$

$$|I_2(t)| \leq \frac{4G\tau^2}{\tau_2(n-1)}. \quad (17)$$

Доказательство. Из определения функции $\widehat{\psi}_n(t)$ нетрудно получить оценку

$$\left| \widehat{\psi}_n(t) \right| \leq \frac{1}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{n-1}}.$$

Следовательно, существует $n_{**} > 0$, такое, что

$$\left| \widehat{\psi}_n(t) \right| \leq 2e^{\theta\tau}, \quad n > n_{**}.$$

Учитывая условия на функцию $g(t, z)$, получаем

$$|I_1(t)| \leq 2e^{\theta\tau} \int_0^t |g(s, z_n^n(s)) - g(s, x_n^n(s))| ds \leq 2e^{\theta\tau} L \int_0^t |z_n^n(s) - x_n^n(s)| ds.$$

Отсюда имеем указанную оценку (16).

Отметим, что для функций $\widehat{\psi}_k(t)$ выполнены рекуррентные отношения

$$\widehat{\psi}_1(t) = e^{-\theta t},$$

$$\widehat{\psi}_k(t) = \frac{n-1}{\tau} \int_0^t e^{-\frac{n-1}{\tau}(t-s)} \widehat{\psi}_{k-1}(s) ds, \quad k = 2, \dots, n. \quad (18)$$

По определению

$$\int_0^t \left| \widehat{\psi}_2(s) - \widehat{\psi}_1(s) \right| ds = \int_0^t \left| \frac{e^{-\theta s}}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)} (1 - e^{(-\frac{n-1}{\tau} + \theta)s}) - e^{-\theta s} \right| ds.$$

С учетом свойств интеграла, получаем

$$\int_0^t \left| \widehat{\psi}_2(s) - \widehat{\psi}_1(s) \right| ds \leq \int_0^t \left| \frac{\theta\tau}{n-1} \frac{e^{-\theta s}}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)} \right| ds + \int_0^t \left| \frac{e^{-\frac{n-1}{\tau}s}}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)} \right| ds.$$

Если $n > 2\theta\tau + 1$, тогда

$$\int_0^t \left| \widehat{\psi}_2(s) - \widehat{\psi}_1(s) \right| ds \leq \frac{2\tau}{n-1} \left((1 - e^{-\theta t}) + (1 - e^{-\frac{n-1}{\tau}t}) \right) \leq \frac{4\tau}{n-1}.$$

Теперь рассмотрим разность

$$\int_0^t \left| \widehat{\psi}_3(s) - \widehat{\psi}_2(s) \right| ds = \int_0^t \frac{n-1}{\tau} \left| \int_0^s e^{-\frac{n-1}{\tau}(s-\xi)} \left(\widehat{\psi}_2(\xi) - \widehat{\psi}_1(\xi) \right) d\xi \right| ds.$$

Используя свойства интеграла и меняя порядок интегрирования, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t \left| \widehat{\psi}_3(s) - \widehat{\psi}_2(s) \right| ds &\leq \int_0^t \left| \widehat{\psi}_2(\xi) - \widehat{\psi}_1(\xi) \right| \left(\int_\xi^t \frac{n-1}{\tau} e^{-\frac{n-1}{\tau}(s-\xi)} ds \right) d\xi \\ &\leq \int_0^t \left| \widehat{\psi}_2(\xi) - \widehat{\psi}_1(\xi) \right| d\xi. \end{aligned}$$

В силу полученной выше оценки получаем

$$\int_0^t \left| \widehat{\psi}_3(s) - \widehat{\psi}_2(s) \right| ds \leq \frac{4\tau}{n-1}.$$

Проводя аналогичные рассуждения, заключаем

$$\int_0^t \left| \widehat{\psi}_n(s) - \widehat{\psi}_{n-1}(s) \right| ds \leq \frac{4\tau}{n-1}.$$

Учитывая лемму 3, получаем оценку

$$\begin{aligned} |I_2(t)| &\leq \frac{n-1}{\tau_2} \int_0^t \left| \widehat{\psi}_{n-1}(t-s) - \widehat{\psi}_n(t-s) \right| |z_1^n(s)| ds \\ &\leq \frac{G\tau}{\tau_2} \int_0^t \left| \widehat{\psi}_{n-1}(t-s) - \widehat{\psi}_n(t-s) \right| ds \leq \frac{4G\tau^2}{\tau_2(n-1)}. \end{aligned}$$

Следовательно, при $n > n_* = \max\{2\theta\tau + 1, n_{**}\}$ выполнены оценки (16) и (17). Лемма доказана.

Нам остается получить оценку для $I_3(t)$.

Лемма 5. Существует $n_0 > 0$ такое, что при $n > n_0$ выполнена оценка

$$|I_3(t)| \leq \frac{8G\tau^2}{\tau_2} \left(\frac{\theta\tau}{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right).$$

Доказательство. По определению $I_3(t)$ имеем

$$I_3(t) = \frac{n-1}{\tau_2} \sum_{j=1}^{n-2} \int_0^t \left[\widehat{\psi}_j(t-s) - 2\widehat{\psi}_{j+1}(t-s) + \widehat{\psi}_{j+2}(t-s) \right] z_{n-j}^n(s) ds.$$

Рассмотрим первое слагаемое

$$\frac{n-1}{\tau_2} \int_0^t \left[\widehat{\psi}_1(t-s) - 2\widehat{\psi}_2(t-s) + \widehat{\psi}_3(t-s) \right] z_{n-1}^n(s) ds.$$

В силу представления для $\widehat{\psi}_k(t)$, указанного в лемме 2, получаем

$$\widehat{\psi}_1(t) - 2\widehat{\psi}_2(t) + \widehat{\psi}_3(t) = e^{-\theta t} - 2 \frac{e^{-\theta t} - e^{-\frac{n-1}{\tau}t}}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)} + \frac{e^{-\theta t} - e^{-\frac{n-1}{\tau}t} \left(1 + \left(\frac{n-1}{\tau} - \theta\right)t\right)}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}_1(t) - 2\widehat{\psi}_2(t) + \widehat{\psi}_3(t) &= e^{-\theta t} \left(1 + \frac{1}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^2} - \frac{2}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)} \right) \\ &\quad - \frac{e^{-\frac{n-1}{\tau}t}}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^2} \left(1 + \left(\frac{n-1}{\tau} - \theta \right) t - 2 \left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1} \right) \right) \\ &= \left(\frac{\theta\tau}{n-1} \right)^2 \frac{e^{-\theta t}}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^2} + \frac{e^{-\frac{n-1}{\tau}t}}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^2} \left(1 - \frac{2\theta\tau}{n-1} \right) - \frac{(n-1)te^{-\frac{n-1}{\tau}t}}{\tau \left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)}. \end{aligned}$$

Обозначим $\varphi_j(\lambda, t) = \frac{n-1}{\tau_2} \int_0^t e^{(t-s)\lambda} z_{n-j}^n(s) ds$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{\tau_2} \int_0^t \left[\widehat{\psi}_1(t-s) - 2\widehat{\psi}_2(t-s) + \widehat{\psi}_3(t-s) \right] z_{n-1}^n(s) ds &= \left(\frac{\theta\tau}{n-1} \right)^2 \frac{\varphi_1(-\theta, t)}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^2} \\ &\quad + \frac{\varphi_1\left(-\frac{n-1}{\tau}, t\right)}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^2} \left(1 - \frac{2\theta\tau}{n-1} \right) - \frac{(n-1)^2}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)\tau\tau_2} \int_0^t e^{-\frac{n-1}{\tau}(t-s)} (t-s) z_{n-1}^n(s) ds. \quad (19) \end{aligned}$$

Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\frac{n-1}{\tau_2} \int_0^t \left[\widehat{\psi}_1(t-s) - 2\widehat{\psi}_2(t-s) + \widehat{\psi}_3(t-s) \right] z_{n-1}^n(s) ds = \frac{(\theta\tau)^2 \varphi_1(-\theta, t)}{(n-1)^2 \left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^2}$$

$$-\frac{\theta\tau\varphi_1(-\frac{n-1}{\tau}, t)}{(1-\frac{\theta\tau}{n-1})^2(n-1)} + \frac{n-1}{(1-\frac{\theta\tau}{n-1})\tau_2} \int_0^t e^{-\frac{n-1}{\tau}(t-s)}(t-s) \frac{dz_{n-1}^n(s)}{ds} ds. \quad (20)$$

Отметим, что равенства типа (20) остаются верными, если вместо $z_{n-1}^n(t)$ в исходный интеграл подставлять $z_j^n(t)$, $j = 2, \dots, n-2$.

Рассмотрим теперь второе слагаемое в представлении $I_3(t)$

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{\tau_2} \int_0^t \left(\widehat{\psi}_2(t-s) - 2\widehat{\psi}_3(t-s) + \widehat{\psi}_4(t-s) \right) z_{n-2}^n(s) ds &= \frac{n-1}{\tau_2} \int_0^t \frac{n-1}{\tau} \\ &\times \int_0^{t-s} e^{-\frac{n-1}{\tau}\xi} \left(\widehat{\psi}_1(t-s-\xi) - 2\widehat{\psi}_2(t-s-\xi) + \widehat{\psi}_3(t-s-\xi) \right) d\xi z_{n-2}^n(s) ds. \end{aligned}$$

Меняя порядок интегрирования и делая соответствующую замену, получаем

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{\tau_2} \int_0^t \left(\widehat{\psi}_2(t-s) - 2\widehat{\psi}_3(t-s) + \widehat{\psi}_4(t-s) \right) z_{n-2}^n(s) ds &= \frac{n-1}{\tau_2} \\ &\times \int_0^t e^{-\frac{n-1}{\tau}(t-\xi)} \frac{n-1}{\tau} \int_0^\xi \left(\widehat{\psi}_1(\xi-s) - 2\widehat{\psi}_2(\xi-s) + \widehat{\psi}_3(\xi-s) \right) z_{n-2}^n(s) ds d\xi. \end{aligned}$$

Применяя равенство типа (20), приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} &\frac{n-1}{\tau_2} \int_0^t \left(\widehat{\psi}_2(t-s) - 2\widehat{\psi}_3(t-s) + \widehat{\psi}_4(t-s) \right) z_{n-2}^n(s) ds \\ &= \frac{n-1}{\tau} \int_0^t e^{-\frac{n-1}{\tau}(t-\xi)} \left[\frac{\left(\frac{\theta\tau}{n-1}\right)^2 \varphi_2(-\theta, \xi) - \frac{\theta\tau}{n-1} \varphi_2(-\frac{n-1}{\tau}, \xi)}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\frac{n-1}{\tau_2}}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)} \int_0^\xi e^{-\frac{n-1}{\tau}(\xi-s)} (\xi-s) \frac{dz_{n-2}^n(s)}{ds} ds \right] d\xi \\ &= \frac{n-1}{\tau} \int_0^t e^{-\frac{n-1}{\tau}(t-\xi)} \frac{\left(\frac{\theta\tau}{n-1}\right)^2 \varphi_2(-\theta, \xi) - \frac{\theta\tau}{n-1} \varphi_2(-\frac{n-1}{\tau}, \xi)}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^2} \end{aligned}$$

$$+ \frac{(n-1)^2}{\tau\tau_2} \int_0^t e^{-\frac{n-1}{\tau}(t-s)} \frac{(t-s)^2}{2} \frac{dz_{n-2}^n(s)}{ds} ds.$$

Проводя аналогичные рассуждения для всех слагаемых с учетом (18), можно получить

$$\begin{aligned} & \frac{n-1}{\tau_2} \int_0^t \left(\widehat{\psi}_j(t-s) - 2\widehat{\psi}_{j+1}(t-s) + \widehat{\psi}_{j+2}(t-s) \right) z_{n-j}^n(s) ds \\ &= \Phi_j^j(t) + \frac{\frac{n-1}{\tau_2} \left(\frac{n-1}{\tau} \right)^{j-1}}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1} \right)} \int_0^t e^{-\frac{n-1}{\tau}(t-s)} \frac{(t-s)^j}{j!} \frac{dz_{n-j}^n(s)}{ds} ds, \quad j = 1, \dots, n-2, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1^k(t) &= \frac{\left(\frac{\theta\tau}{n-1} \right)^2 \varphi_k(-\theta, t) - \frac{\theta\tau}{n-1} \varphi_k\left(-\frac{n-1}{\tau}, t\right)}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1} \right)^2}, \\ \Phi_j^k(t) &= \left(\frac{n-1}{\tau} \right) \int_0^t e^{-\frac{n-1}{\tau}(t-s)} \Phi_{j-1}^k(s) ds. \end{aligned} \quad (22)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} I_3(t) &= \sum_{j=1}^{n-2} \Phi_j^j(t) + \frac{1}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1} \right)} \sum_{j=1}^{n-2} \frac{n-1}{\tau_2} \left(\frac{n-1}{\tau} \right)^{j-1} \\ &\quad \times \int_0^t e^{-\frac{n-1}{\tau}(t-s)} \frac{(t-s)^j}{j!} \frac{dz_{n-j}^n(s)}{ds} ds. \end{aligned} \quad (23)$$

Для дальнейших рассуждений воспользуемся теоремой о среднем.

Теорема (о среднем) [16]. Пусть $g(s)$ непрерывна и ограничена, а $f(s)$ не меняет знак на отрезке $[a, b]$, тогда существует $\mu \in [a, b]$, такое что

$$\int_a^b f(s)g(s) ds = g(\mu) \int_a^b f(s) ds.$$

Используя эту теорему и лемму 3, оценим первую группу слагаемых в (23). По определению $\Phi_1^j(t)$ получаем

$$|\Phi_1^j(t)| = \frac{\left| \frac{\theta^2 \tau^2}{(n-1)^2} \frac{n-1}{\tau_2} z_{n-j}^n(\eta) \int_0^t e^{-\theta s} ds - \frac{\theta \tau}{n-1} \frac{n-1}{\tau_2} z_{n-j}^n(\zeta) \int_0^t e^{-\frac{n-1}{\tau} s} ds \right|}{\left(1 - \frac{\theta \tau}{n-1}\right)^2}.$$

Тогда при $n > 2\theta\tau + 1$ имеем

$$|\Phi_1^j(t)| \leq \frac{\frac{\theta \tau^2}{(n-1)^2} \frac{G\tau}{\tau_2} + \frac{\theta \tau^2}{(n-1)^2} \frac{G\tau}{\tau_2}}{\left(1 - \frac{\theta \tau}{n-1}\right)^2} \leq \frac{8G\tau}{\tau_2} \frac{\theta \tau^2}{(n-1)^2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |\Phi_2^k(t)| &\leq \frac{n-1}{\tau} \int_0^t e^{-\frac{n-1}{\tau}(t-s)} |\Phi_1^k(s)| ds \\ &\leq \frac{8G\tau}{\tau_2} \frac{\theta \tau}{n-1} \int_0^t e^{-\frac{n-1}{\tau} s} ds \leq \frac{8G\tau}{\tau_2} \frac{\theta \tau^2}{(n-1)^2}. \end{aligned}$$

Рассуждая аналогичным образом, получаем, что для любого j справедливы неравенства

$$|\Phi_j^k(t)| \leq \frac{n-1}{\tau} \int_0^t e^{-\frac{n-1}{\tau}(t-s)} |\Phi_{j-1}^k(s)| ds \leq \frac{8G\tau}{\tau_2} \frac{\theta \tau^2}{(n-1)^2}.$$

Рассмотрим

$$J_j(t) = \int_0^t e^{-\frac{n-1}{\tau}(t-s)} \left(\frac{n-1}{\tau}\right)^{j-1} \frac{(t-s)^j}{j!} \frac{dz_{n-j}^n(s)}{ds} ds, \quad j = 1, \dots, n-2.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$J_j(t) = \int_0^t e^{-\frac{n-1}{\tau}(t-s)} z_{n-j}^n(s) \left[\left(\frac{n-1}{\tau}\right)^{j-1} \frac{(t-s)^{j-1}}{(j-1)!} - \left(\frac{n-1}{\tau}\right)^j \frac{(t-s)^j}{j!} \right] ds.$$

Используя лемму 3, имеем

$$|J_j(t)| \leq \int_0^t e^{-\frac{n-1}{\tau}s} \frac{G\tau}{n-1} \left| \frac{\left(\frac{n-1}{\tau}s\right)^{j-1}}{(j-1)!} - \frac{\left(\frac{n-1}{\tau}s\right)^j}{j!} \right| ds.$$

Тогда из (23) следует

$$|I_3(t)| \leq \frac{8G\tau}{\tau_2} \frac{\theta\tau^2(n-2)}{(n-1)^2} + \frac{1}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)} \frac{G\tau}{\tau_2} \sum_{j=1}^{n-2} \int_0^t e^{-\frac{n-1}{\tau}s} \times \left| \frac{\left(\frac{n-1}{\tau}s\right)^{j-1}}{(j-1)!} - \frac{\left(\frac{n-1}{\tau}s\right)^j}{j!} \right| ds = \frac{G\tau}{\tau_2} \left(\frac{8\theta\tau^2(n-2)}{(n-1)^2} + \frac{1}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)} S_n(t) \right),$$

где

$$S_n(t) = \sum_{j=1}^{n-2} \int_0^t e^{-\frac{n-1}{\tau}s} \frac{\left(\frac{n-1}{\tau}s\right)^{j-1}}{(j-1)!} \left| 1 - \frac{n-1}{j\tau}s \right| ds.$$

Раскрывая модуль, получаем

$$S_n(t) = \sum_{j=1}^{n-2} \left[\int_0^{\frac{j\tau}{n-1}} e^{-\frac{n-1}{\tau}s} \left(\frac{\left(\frac{n-1}{\tau}s\right)^{j-1}}{(j-1)!} - \frac{\left(\frac{n-1}{\tau}s\right)^j}{j!} \right) ds + \int_{\frac{j\tau}{n-1}}^t e^{-\frac{n-1}{\tau}s} \left(\frac{\left(\frac{n-1}{\tau}s\right)^j}{j!} - \frac{\left(\frac{n-1}{\tau}s\right)^{j-1}}{(j-1)!} \right) ds \right].$$

После замены переменной можно переписать $S_n(t)$ следующим образом

$$S_n(t) = \frac{\tau}{(n-1)} \sum_{j=1}^{n-2} \left[\int_0^j e^{-\eta} \left(\frac{\eta^{j-1}}{(j-1)!} - \frac{\eta^j}{j!} \right) d\eta + \int_j^{\frac{n-1}{\tau}t} e^{-\eta} \left(\frac{\eta^j}{j!} - \frac{\eta^{j-1}}{(j-1)!} \right) d\eta \right]. \quad (24)$$

В силу монотонности

$$S_n(t) \leq \frac{\tau}{(n-1)} \sum_{j=1}^{n-2} \left[\int_0^j e^{-\eta} \left(\frac{\eta^{j-1}}{(j-1)!} - \frac{\eta^j}{j!} \right) d\eta + \int_j^\infty e^{-\eta} \left(\frac{\eta^j}{j!} - \frac{\eta^{j-1}}{(j-1)!} \right) d\eta \right]$$

$$= \frac{2\tau}{(n-1)} \sum_{j=1}^{n-2} \frac{e^{-j} j^j}{j!}.$$

Используя неравенство Стирлинга, имеем

$$S_n(t) \leq \frac{2\tau}{(n-1)} \sum_{j=1}^{n-2} \frac{e^{-j} j^j e^j}{j^j \sqrt{2\pi j}} = \frac{2\tau}{(n-1)\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{j}}.$$

Поскольку функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ является монотонно убывающей и неотрицательной при $x \geq 1$, то справедливо неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{j}} \leq \int_{j-1}^j \frac{1}{\sqrt{s}} ds.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{j}} \leq \sum_{j=1}^{n-2} \int_{j-1}^j \frac{1}{\sqrt{s}} ds = \int_0^{n-2} \frac{1}{\sqrt{s}} ds \leq \int_0^{n-1} \frac{1}{\sqrt{s}} ds = 2\sqrt{n-1}.$$

Тогда

$$S_n(t) \leq \frac{2\tau}{\sqrt{n-1}}.$$

Следовательно, приходим к оценке

$$\begin{aligned} |I_3(t)| &\leq \frac{G\tau}{\tau_2} \left(\frac{8\theta\tau^2(n-2)}{(n-1)^2} + \frac{1}{(1 - \frac{\theta\tau}{n-1})} \frac{2\tau}{\sqrt{n-1}} \right) \\ &\leq \frac{8G\tau^2}{\tau_2} \left(\frac{\theta\tau}{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right). \end{aligned}$$

Лемма 5 доказана.

Используя леммы 4 и 5, для $|u_n^n(t)|$ выполнена оценка

$$|u_n^n(t)| \leq \frac{8G\tau^2}{\tau_2} \left(\frac{\theta\tau}{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right) + \frac{4\tau}{n-1} \frac{G\tau}{\tau_2} + 2e^{\theta\tau} L \int_0^t |u_n^n(s)| ds.$$

В силу неравенства Гронуолла получаем

$$|u_n^n(t)| \leq \frac{8G\tau^2}{\tau_2} \left(\frac{\theta\tau}{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \right) \exp(2e^{\theta\tau} LT) \leq \frac{d}{\sqrt{n}}.$$

Отсюда имеем требуемое неравенство (10).

Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (4). Очевидно, имеем

$$\max_{t \in [0, T]} |z_n^n(t) - y(t)| \leq \max_{t \in [0, T]} |x_n^n(t) - y(t)| + \max_{t \in [0, T]} |z_n^n(t) - x_n^n(t)|.$$

Учитывая оценки (5) и (12) приходим к неравенству

$$\max_{t \in [0, T]} |z_n^n(t) - y(t)| \leq Dn^{-\frac{1}{2}}, \quad n \gg 1.$$

Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. Марри Дж. *Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии*. . Москва: Мир, 1983.
2. Хидиров Б. Н. Об одном подходе к моделированию регуляторных механизмов живых систем // *Матем. моделирование*. 2004. Т. 16, № 7. С. 77–91.
3. Лихошвай В. А., Фадеев С. И., Демиденко Г. В., Матушкин Ю. Г. Моделирование уравнением с запаздывающим аргументом многостадийного синтеза без ветвления // *Сиб. журн. индустр. мат.* 2004. Т. 7, № 1. С. 73–94.
4. Демиденко Г. В., Колчанов Н. А., Лихошвай В. А., Матушкин Ю. Г., Фадеев С. И. Математическое моделирование регуляторных контуров генных сетей // *Журн. выч. матем. матем. физ.* 2004. Т. 44, № 12. С. 2276–2295.
5. Демиденко Г. В., Мельник И. А. Об одном способе аппроксимации решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // *Сиб. мат. журн.* 2010. Т. 51, № 3. С. 528–546.
6. Демиденко Г. В., Лихошвай В. А., Котова Т. В., Хропова Ю. Е. Об одном классе систем дифференциальных уравнений и об уравнениях с запаздывающим аргументом // *Сиб. мат. журн.* 2006. Т. 47, № 1. С. 58–68.
7. Демиденко Г. В., Лихошвай В. А., Мудров А. В. О связи между решениями дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и бесконечномерных систем дифференциальных уравнений // *Дифф. уравн.* 2009. Т. 45, № 1. С. 34–46.

8. Demidenko G. V., Kotova T. V. Limit properties of solutions to one class of systems of differential equations with parameters // *J. Anal. Appl.* 2010. Vol. 8, N 2. P. 63–74.
9. Демиденко Г. В. О классах систем дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнениях с запаздывающим аргументом // *Итоги науки. Юг России. Сер.: Математический форум. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А.* 2011. Т. 5. С. 45–56.
10. Демиденко Г. В. Системы дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнения с запаздывающим аргументом // *Сиб. мат. журн.* 2012. Т. 53, № 6. С. 1274–1282.
11. Матвеева И. И., Мельник И. А. О свойствах решений одного класса нелинейных систем дифференциальных уравнений большой размерности // *Сиб. мат. журн.* 2012. Т. 53, № 2, С. 312–324.
12. Уварова И. А. Об одной системе нелинейных дифференциальных уравнений высокой размерности // *Сиб. журн. индустр. мат.* 2014. Т. 17, № 3. С. 111–121.
13. Демиденко Г. В., Уварова И. А. Класс систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности // *Сиб. журн. индустр. мат.* 2016. Т. 19, № 2. С. 47–60.
14. Demidenko G. V. Systems of differential equations of high dimension, delay and partial differential equations // *Functional Differential Equations.* 2018. V. 25, N 1–2. P. 21–34.
15. Демиденко Г. В. Метод решения одной биологической задачи большой размерности // *Сиб. журн. индустр. мат.* 2022. Т. 25, № 4. С. 42–53.
16. Решетняк Ю. Г. *Курс математического анализа Ч. I, кн. 2.* Новосибирск: Издательство Института математики. 1999. С. 96.

References

1. Марри Дж. *Lectures on Nonlinear-Differential-Equation Models in Biology.* Moskow: Mir. 1983.
2. Hidirov B. N. On one approach to modeling of living system regulatory mechanisms. *Mat. Model.* 2004. V. 16, N. 7, P. 77–91. (2004).
3. Likhoshvai V. A., Fadeev S. I., Demidenko G. V., Matushkin Y. G. Modeling multistage synthesis without branching by a delay equation. *Sib. Zh. Ind. Mat.* 2004. V. 7, N. 1, P. 73–94.

4. Demidenko G. V., Kolchanov N. A., Likhoshvai V. A., Matushkin Yu. G., Fadeev S. I. Mathematical modeling of regular contours of gene networks. *Comput. Math. Math. Phys.* 2004. V. 44, N. 12, P. 2276–2295.
5. Demidenko G. V., Mel'nik I. A. On a method of approximation of solutions to delay differential equations. *Sib. Math. J.* 2010. V. 51, N. 3, P. 528–546.
6. Demidenko G. V., Likhoshvai V. A., Kotova T. V., Khropova Yu. E. On one class of systems of differential equations and on retarded equations. *Sib. Math. J.* 2006. V. 47, N. 1, P. 58–68.
7. Demidenko G. V., Likhoshvai V. A., Mudrov A. V. On the relationship between solutions of delay differential equations and infinite-dimensional systems of differential equations. *Differential Equations*. 2009. V. 45, N. 1, P. 34–46.
8. Demidenko G. V., Kotova T. V. Limit properties of solutions to one class of systems of differential equations with parameters // *J. Anal. Appl.* 2010. Vol. 8, N 2. P. 63–74.
9. Demidenko G. V. On classes of systems of differential equations of large dimension and delay equations. In: *Itogi Nauki. Yug Rossii. Ser. Mat. Forum. Vol. 5, YuMI VNTs RAN i RSO-A, Vladikavkaz*. 2011. P. 45–56.
10. Demidenko G. V. Systems of differential equations of higher dimension and delay equations. *Sib. Math. J.* 2012. V. 53, N. 6, P. 1274–1282.
11. Matveeva I. I., Mel'nik I. A. On the properties of solutions to a class of nonlinear systems of differential equations of large dimension. *Sib. Math. J.* 2012. V. 53, N. 2, P. 312–324.
12. Uvarova I. A. On a system of nonlinear differential equations of high dimension. *Sib. Zh. Ind. Mat.* 2014. V. 17, N. 3, P. 111–121.
13. Demidenko G. V., Uvarova I. A. A class of systems of ordinary differential equations of large dimension. *Sib. Zh. Ind. Mat.* 2016. V. 19, N. 2, P. 47–60.
14. Demidenko G. V. Systems of differential equations of high dimension, delay and partial differential equations. *Functional Differential Equations*. 2018. V. 25, N. 1–2, P. 21–34.
15. A method for solving a biological problem of large dimension. *Sib. Zh. Ind. Mat.* 2022. V. 25, N. 4, P. 42–53.

16. Reshetnyak Yu. G. *Course in Mathematical Analysis Part 1, V. 2.* Novosibirsk: Izdatelstvo Instituta matematiki. 1999. P.96.

Информация об авторе

Виктор Андреевич Денисюк, аспирант

SPIN 3431-8744 AuthorID: 1233053

Scopus Author ID 58736841300

Author Information

Viktor A. Denisiuk, PhD student

SPIN 3431-8744 AuthorID: 1233053

Scopus Author ID 58736841300

*Статья поступила в редакцию 08.06.2025;
одобрена после рецензирования 17.07.2025; принята к публикации
06.08.2026*

*The article was submitted 08.06.2025;
approved after reviewing 17.07.2025; accepted for publication 06.08.2026*